تعريف: الجبر التام الأول لصف المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$ يسمى جبر بوريل لـ $\mathbb{R}$ ونرمز له بـ $B(\mathbb{R})$

إن كل عنصر من هذا الجبر يسمى مجموعة بوريلية.

ملاحظة: يمكن توليد جبر بوريل $B(\mathbb{R})$ بأحد الصفوف الآتية:

1) $\mathcal{Y}_1 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R},\ a<b\}$

2) $\mathcal{Y}_2 = \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R},\ a<b\}$

3) $\mathcal{Y}_3 = \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R},\ a<b\}$

4) $\mathcal{Y}_4 = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R},\ a<b\}$

5) $\mathcal{Y}_5 = \{(a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\}$

6) $\mathcal{Y}_6 = \{[a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\}$

7) $\mathcal{Y}_7 = \{(-\infty,b] : b \in \mathbb{R}\}$

8) $\mathcal{Y}_8 = \{(-\infty,b) : b \in \mathbb{R}\}$

كل صف من هذه الصفوف يولد جبر بوريل.

الإثبات:

1) طالما أن المجال (a,b) هو مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ فهي مجموعة بوريلية

$\mathcal{Y}_1 \subseteq B(\mathbb{R})$

$S(\mathcal{Y}_1) \subseteq B(\mathbb{R})$ ...... ①

وإذا رمزنا $\mathcal{E}$ لصف المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$.

$\forall E \in \mathcal{E}$ ما يمكن أن تكتب بالشكل $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$

فإذا هذا يعود جزء أ.

$$\Rightarrow \mathcal{E} \subseteq S(\mathcal{Y}_1)$$

وبالتالي فإن

$$B(\mathbb{R}) = S(\mathcal{E}) \subseteq S(\mathcal{Y}_1) \Rightarrow$$

$$B(\mathbb{R}) \subseteq S(\mathcal{Y}_1) \quad \ldots \quad ①$$

ومن العلاقتين ① و ② نحصل على المساواة.

$$B(\mathbb{R}) = S(\mathcal{Y}_1)$$

إثبات (٢): لنثبت أولاً أن كل مجال $[a,b]$ هو عبارة عن مجموعة بوريلية
وملاحظة أن المجال المغلق

$$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right) \in B(R)$$

(لأنها أصبحت من المجالات المفتوحة على ما ينتمي إلى الجبر بوريل $B(R)$ وبالتالي التقاطع المعدود ينتمي إلى $B(R)$)
ومن ثم نجد أن:

$$\mathcal{Y}_2 \subseteq B(R)$$

ومن ذلك نجد

$$S(\mathcal{Y}_2) \subseteq B(R) \quad \ldots \quad ②$$

ولما كان المجال كتابة أي مجال مفتوح على شكل إتحاد

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$$

وهذا يعني

$$\mathcal{Y}_1 \subseteq S(\mathcal{Y}_2) \Rightarrow S(\mathcal{Y}_1) \subseteq S(\mathcal{Y}_2)$$

$$\Rightarrow B(\mathbb{R}) \subseteq S(\mathcal{Y}_2)$$

$$\Rightarrow B(\mathbb{R}) = S(\mathcal{Y}_2)$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات الخواص التالية.
نتيجة (٣): كل مجال مفتوح في R^n هو مجموعة بوريلية وذلك مجال في R

هو مجموعة بوريلية وكل مجال مغلق ومحدود هو مجموعة بوريلية وكل مجال محدود هو مجموعة بوريلية من الشكل $]a,b]$ ، $[a,b[$
وبصورة عامة كل مجموعة مفتوحة أو مغلقة هو مجموعة بوريلية في $\mathbb{R}$.
نعلم لتكن (X,d) فضاء متري ما ، إن [illegible] من المجموعات المفتوحة في X لا تكون جبرا في الحالة العامة لكن لو رمزنا بـ B للجبر الناتج المولد بها [illegible] فإننا نسمي كل عنصر منه مجموعة بوريلية وبذلك تكون كل مجموعة مفتوحة في فضاء متري ما مجموعة بوريلية وكل تقاطع عدود هو مجموعة بوريلية كل مجموعة مغلقة هو مجموعة بوريلية وكل مجموعة عدودة أو قابلة للعد وكل مجموعة متراصة هي مجموعة بوريلية.

• **تعريف:** لتكن الدالة معرفة بالشكل:

$$m : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+ = [0, +\infty]$$
$$A \longrightarrow m(A)$$

حيث $\mathcal{A}$ جبر [illegible]
إن هذه الدالة تسمى بالقياس على الجبر $\mathcal{A}$ إذا تحقق ما يلي:

1) $m(\emptyset) = 0$

2) m تكون دالة جمعية (أي أنه من أجل أي متتالية من المجموعات [illegible] $A_1, A_2, \dots, A_n$ من $\mathcal{A}$ ومنفصلة مثنى مثنى ، $A_i \cap A_j = \emptyset$
حيث $i \neq j$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، $j = 1, 2, \dots, n$
فيكون

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$$

[illegible] صورة الدالة m هي [illegible] من مجموع صور الدالة m

- 2 - خواص القياس: إن m قياس على الجبر $\mathcal{A}$ يحقق الخواص التالية:

1) m دالة متزايدة ، وذلك لأن:

$$\forall A, B \in \mathcal{A} , A \subseteq B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$$

وعلى ملاحظة أن:

$$B = (B - A) \cup A \Rightarrow m(B) = m(B - A) + m(A)$$
$$\Rightarrow m(B) - m(A) = m(B - A) \geq 0$$
$$\Rightarrow m(B) \geq m(A)$$

أيضا: $m(B - A) = m(B) - m(A)$ [illegible] $m(A) < \infty$ [illegible]

* تعريف: ليكن $[X, S]$ فضاء مقيس نعرّف الدالة المعطاة بالشكل:

$$\mu : S \longrightarrow [0, +\infty] = \bar{R}_+$$
$$A \longrightarrow \mu(A)$$

إنها قياس على S إذا تحققت ما يلي:

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) μ دالة جمعية تامة (أي أنه من أجل أي متتالية $(A_n)_{n\geq 1}$ من عناصر الـ S (عدد غير منتهي) منفصلة مثنى مثنى $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ أي أنها مجموعات متقطعة تقاطعها $\emptyset$ فإن:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

* الخواص الرياضية للقياس:

1) μ دالة رتيبة ومتزايدة:

$$\forall A, B \in S, \ A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

$$B = (B - A) \cup A$$

$$\mu(B) = \mu(B - A) + \mu(A)$$

$$\mu(B) - \mu(A) = \mu(B - A) \geq 0 \Rightarrow \mu(B) \geq \mu(A)$$

2) الدالة μ تحقق خاصية تحت الجمعية التامة (نصف الجمعية) وذلك لأن:

$$\forall (A_n)_{n\geq 1} \subset S \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

لأنه ليس من الضروري أن تكون المجموعات A_n منفصلة مثنى مثنى.

وبشكل خاص $\mu(A \cup B)$: $\forall A \in S, \ \forall B \in S$

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$$

لأن A, B ليست بالضرورة أن تكونا منفصلتين.

ملاحظة: سنرمز بـ $[X, S, \mu]$ فضاء مقيس مع قياس.

ملاحظة: يمكن تعريف أكثر من قياس على الجبر S، أي أكثر من قياس على الجبر الواحد.

- كل قياس هو شبه قياس والعكس غير صحيح بالضرورة.

من خواص القياس أيضاً:

1- إذا كانت $(A_n)_{n\geq 1}$ متتالية ما متزايدة من المجموعات $[X, S, \mu]$

$(A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A_n \subset \dots)$

وكانت $(A_n \subseteq A_{n+1} , n = 1, 2, \dots)$

فإن

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

2- إذا كانت $(B_n)_{n\geq 1}$ متتالية متناقصة من $[X, S, \mu]$

$(B_n \supseteq B_{n+1} , n = 1, 2, \dots)$

فإن

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n) \; ; \; \mu(B_1) < \infty$$

• تعريف القياس الخارجي:

لتكن الدالة

$$\mu^* : P(X) \to [0, \infty] = \bar{R}$$

المعرفة بالشكل: $A \to \mu^*(A)$

إن هذه الدالة تسمى قياس خارجي على $P(X)$ إذا تحقق الآتي:

1) $\mu^*(\emptyset) = 0$

2) $A \subseteq B \; , \; \forall A, B \subset P(X)$

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

3) من أجل أي متتالية $(A_n)_{n\geq 1}$ من $P(X)$ فإن

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

تسمى الخاصية الثالثة "أو خاصية الجمع الجزئي"

• تعريف المجموعة المقيسة:

لتكن μ^* قياساً خارجياً على X نقول عن المجموعة $E \in P(X)$ أنها مقيسة بالنسبة لـ μ^* إذا تحققت المساواة التالية

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \; ; \; \forall A \in P(x)$$

حيث $E^c = (X - E)$ متممة المجموعة E بالنسبة المجموعة X.

وسوف نرمز m_{μ^*} لصف المجموعات القابلة للقياس بالنسبة لـ μ^*

* ملاحظة: لإثبات أن المجموعة E قابلة للقياس ($P(x)$) بالنسبة لـ μ^* يكفي لإثبات تحقق المتباينة الآتية:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \; ; \; \forall A \in P(x)$$

لأن الشرط الآتي:

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \; ; \; \forall A \in P(x)$$

$$A = A \cap X = A \cap (E \cup E^c) = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$$

$$\Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

تمرين: إذا كانت

$$E \in m \Rightarrow E^c \in m_{\mu^*}$$

نفرض أن E قابلة بالنسبة لـ μ^* ما الشرط (1) تحقق:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (E^c)^c) + \mu^*(A \cap E^c)$$

$$= \mu^*(A \cap E^c) + \mu^*(A \cap (E^c)^c) \; ; \; \forall A \in P(x)$$

$$\Rightarrow E^c \in m_{\mu^*}$$

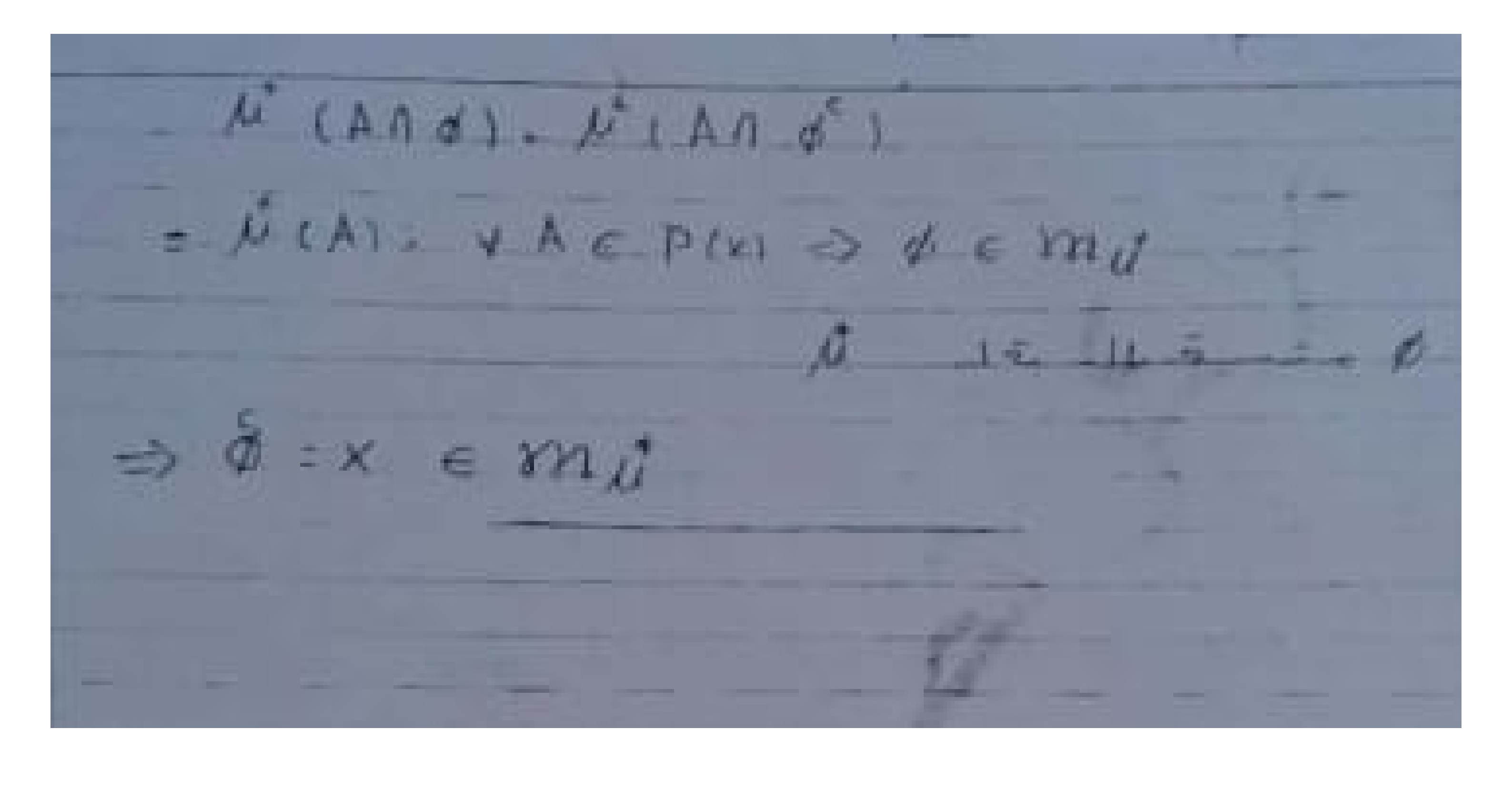
نتيجة: $\emptyset \in m_{\mu^*}$ ، $X \in m_{\mu^*}$

الإثبات:

$$\mu^*(A \cap \emptyset) + \mu^*(A \cap X) = \mu^*(\emptyset) + \mu^*(A)$$

$$= \mu^*(A) \; ; \; \forall (A) \in P(x)$$

إذا اعتبرنا $X^c = \emptyset$ ، $\emptyset^c = X$ تم المطلوب



$\mu^*(A \cap \phi) + \mu^*(A \cap \phi^c)$

$= \mu^*(A), \ \forall A \in P(X) \Rightarrow \phi \in m_{\mu^*}$

ϕ is [illegible]

$\Rightarrow \phi^c = X \in m_{\mu^*}$